Topologia
Lista 5

Zad 1. Dowieść, że przestrzeń topologiczna (X, τ) jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia *warunek Riesza*, to jest gdy: dla dowolnej rodziny $\{F_t\}_{t\in T}$ zbiorów domkniętych

$$\bigcap_{t\in T} F_t = \emptyset \implies \exists_{\{t_1,\dots,t_n\}\subset T}\ F_{t_1} \cap \dots \cap F_{t_n} = \emptyset.$$

Zad 2. Które ze zbiorów X (oraz A_i w podpunkcie a)) z zadania 11 na liście 3 są zwarte.

Zad 3. Pokazać, że ciągły obraz przestrzeni zwartej jest przestrzenią zwartą.

Zad 4. Wykazać, że każdy domknięty podzbiór przestrzeni zwartej jest zwarty.

Zad 5. Udowodnić, że jeżeli X jest przestrzenią Hausdorffa, to dowolny jej podzbiór zwarty jest domknięty. Czy zachodzi to twierdzenie dla przestrzeni nie będących T_2-przestrzeniami?

Zad 6. Wykazać, że każdy ciąg punktów w zwartej przestrzeni Hausdorffa zawiera punkt skupienia.

Zad 7. Wykazać, że każda przestrzeń metryczna zwarta jest zupełna.

Zad 8. Pokazać, że w zwartej przestrzeni metrycznej (X, ρ), dla kazdego $\varepsilon > 0$ istnieje *ε-sieć*, czyli skończony zbiór punktów $A_\varepsilon = \{q_1, \dots, q_k\}$ taki, że

$$\rho(x, A_\varepsilon) < \varepsilon, \qquad \text{dla każdego } x \in X.$$

Zad 9. Dowieść, że przestrzeń metryczna zwarta jest ograniczona.

Zad 10. Wykazać, że każda przestrzeń metryczna zwarta jest ośrodkowa.

Zad 11. Pokazać, że każda przestrzeń z bazą przeliczalną jest ośrodkowa.

Zad 12. Dowieść, że każda przestrzeń metryczna ośrodkowa posiada bazę przeliczalną.

Zad 13. Pokazać, że jeśli f jest przekształceniem ciągłym przestrzeni zwartej X na przestrzeń Hausdorffa Y, to

i) f jest przekształceniem domkniętym, to jest przeprowadza zbiory domknięte na domknięte,

ii) jeśli funkcja f jest różnowartościowa, to jest homeomorofizmem.

Zad 14. *Zbiorem Cantora* nazywamy następujący podzbiór odcinka $[0, 1]$

$$\mathcal{C} = \{t = \frac{t_1}{3} + \frac{t_2}{3^2} + \frac{t_3}{3^3} + \dots : t_n \in \{0, 2\}\}$$

Pokazać, że zbiór Cantora jest domknięty, w sobie gęsty oraz brzegowy.

Zad 15. Pokazać, że zbiór Cantora jest homeomorficzny z nieskończonym iloczynem kartezjańskim dwu elementowej przestrzeni dyskretnej:

$$\mathcal{C} \cong \{0, 2\} \times \{0, 2\} \times \{0, 2\} \times \dots .$$